第27卷 第6期
2010年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 6
Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1041-10

一阶拟线性严格双曲型方程组弱间断解的精确能控性及能观性

殷宗芳

(复旦大学数学科学学院，上海 200433)

摘 要: 在一阶拟线性双曲型方程组 C^1 解的精确能控性及能观性的基础上，本文通过对弱间断解性质的研究，在初值和边值存在有限个弱间断点的情况下，得到一阶拟线性严格双曲型方程组混合初边值问题的半整体弱间断解的存在唯一性及相应的估计式，进而得到一阶拟线性严格双曲型方程组在弱间断解意义下相应的精确边界能控性及精确边界能观性。

关键词: 一阶拟线性双曲型方程组；弱间断解；混合初边值问题；精确能控性；精确能观性

分类号: **AMS**(2000) 35L50; 93B05; 93B07 **中图分类号**: O175.2 **文献标识码**: A

1 引言及预备知识

关于线性双曲系统的精确边界能控性及能观性已有大量结果[1-5]，对于一维拟线性自治双曲系统，李大潜等采用一个直接构造法在经典解的框架下已建立了完整的精确能控性及能观性理论[6-14]，在此基础上，文献 [17-20] 给出了非自治情况下拟线性双曲系统的精确能控性及能观性。本文将在初值和边值存在有限个弱间断点的情况下，对一维拟线性双曲组的混合初边值问题进行研究，得出相应于弱间断解的精确边界能控性及能观性。

考虑下述一阶拟线性严格双曲型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(u)\frac{\partial u}{\partial x}=F(u), \tag{1}$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_n)^T$ 是关于变量 (t,x) 的未知函数向量，矩阵 $A(u)=(a_{ij}(u))_{n\times n}$，$F(u)=(f_1(u),\cdots,f_n(u))^T$，$a_{ij}(u)$ 及 $f_i(u)\,(i,j=1,\cdots,n)$ 具有适当的光滑性，且

$$F(0)=0. \tag{2}$$

由严格双曲性，在所考虑的区域上，矩阵 $A(u)$ 具有 n 个互异的实特征值 $\lambda_i(u)\,(i=1,\cdots,n)$。此时，必存在一组完全的左特征向量 $l_i(u)=(l_{i1}(u),\cdots,l_{in}(u))$ 和右特征向量 $r_i(u)=(r_{1i}(u),\cdots,r_{ni}(u))^T$，$i=1,\cdots,n$:

$$l_i(u)A(u)=\lambda_i(u)l_i(u),\quad i=1,\cdots,n, \tag{3}$$

$$A(u)r_i(u)=\lambda_i(u)r_i(u),\quad i=1,\cdots,n. \tag{4}$$

收稿日期: 2010-05-04. **作者简介**: 殷宗芳 (1985年3月生)，女，硕士. 研究方向：应用偏微分方程.

不失一般性，可以假设

$$l_i(u)r_j(u) \equiv \delta_{ij}, \quad i,j = 1,\cdots,n, \tag{5}$$

$$r_i^T(u)r_i(u) \equiv 1, \quad i = 1,\cdots,n, \tag{6}$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 记号。在严格双曲的假设下，特征值 $\lambda_i(u)$ 与特征向量 $l_i(u)$ 及 $r_i(u)(i = 1,\cdots,n)$ 具有与 $A(u) = (a_{ij}(u))_{n\times n}$ 同样的正规性。

假设 $A(u)$ 不具有零特征值，且在所考察的区域上其特征值满足如下条件

$$\lambda_1(u) < \cdots < \lambda_m(u) < 0 < \lambda_{m+1}(u) < \cdots < \lambda_n(u). \tag{7}$$

考虑方程组 (1) 的如下混合初边值问题

$$t = 0:\ u = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L, \tag{8}$$

$$x = 0:\ v_s = G_s(t, v_1, \cdots, v_m) + H_s(t), \quad s = m+1, \cdots, n, \tag{9}$$

$$x = L:\ v_r = G_r(t, v_{m+1}, \cdots, v_n) + H_r(t), \quad r = 1, \cdots, m, \tag{10}$$

其中

$$v_i = l_i(u)u, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{11}$$

不失一般性，可假设

$$G_i(t, 0, \cdots, 0) \equiv 0, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{12}$$

令

$$w_i = l_i(u)u_x, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{13}$$

注意到 (5)，由 (11) 及 (13) 可得

$$u = \sum_{i=1}^{n} v_i r_i(u), \tag{14}$$

$$u_x = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i(u). \tag{15}$$

由文献 [6, 21, 23, 24]，在 C^1 解的存在范围中，可得如下波的分解公式

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}_i t} = \sum_{j,k=1}^{n} \beta_{ijk}(u) v_j w_k + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\beta}_{ij}(u) f_j(u), \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}_i t} = \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{ijk}(u) w_j w_k + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\gamma}_{ij}(u) w_j, \tag{17}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_i t} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x}$$

为沿 i-特征对 t 的方向导数，

$$\beta_{ijk}(u) = \big(\lambda_k(u) - \lambda_i(u)\big) l_i(u) \nabla r_j(u) r_k(u), \tag{18}$$

$$\gamma_{ijk}(u) = \frac{1}{2}\big\{\big(\lambda_j(u) - \lambda_k(u)\big) l_i(u) \nabla r_k(u) r_j(u) - \nabla\lambda_k(u) r_j(u) \delta_{ij} + (j\,|\,k)\big\}, \tag{19}$$

其中 $(j\,|\,k)$ 表示由前面的项交换 j 和 k 后得到的项

$$\tilde{\beta}_{ij}(u)=l_{ij}(u)-\sum_{h,k=1}^{n}\big(l_i(u)\nabla r_h(u)r_k(u)\big)\big(l_h(u)u\big)l_{kj}(u), \tag{20}$$

$$\tilde{\gamma}_{ij}(u)=l_i(u)\nabla F(u)r_j(u)-\sum_{k=1}^{n}\big(l_i(u)\nabla r_j(u)r_k(u)\big)\big(l_k(u)F(u)\big). \tag{21}$$

由文献 [6, 22]，在 C^1 解的存在范围内，可得 $w_i\,(i=1,\cdots,n)$ 所满足的边界条件为

$$x=0:\ w_s=\sum_{r=1}^{m}D_{sr}(t,u)w_r+\bar{D}_s(t,u)+\sum_{\bar{s}=m+1}^{n}\bar{\bar{D}}_{s\bar{s}}(t,u)H'_{\bar{s}}(t),\quad s=m+1,\cdots,n, \tag{22}$$

$$x=L:\ w_r=\sum_{s=m+1}^{n}D_{rs}(t,u)w_s+\bar{D}_r(t,u)+\sum_{\bar{r}=1}^{m}\bar{\bar{D}}_{r\bar{r}}(t,u)H'_{\bar{r}}(t),\quad r=1,\cdots,m, \tag{23}$$

其中 D_{rs}, $\bar{D}_r$, $\bar{\bar{D}}_{r\bar{r}}$, D_{sr}, $\bar{D}_s$, $\bar{\bar{D}}_{s\bar{s}}\,(r,\bar{r}=1,\cdots,m;\ s,\bar{s}=m+1,\cdots,n)$ 是 t 和 u 的连续函数，且对任意给定的 T_0，当 $|u|\to 0$ 时，

$$d(u)=\sup_{\substack{0\le t\le T_0\\ i=1,\cdots,n}}\big|\bar{D}_i(t,u)\big|\to 0. \tag{24}$$

若进一步假设 $\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,\cdot)$ 对 $v=(v_1,\cdots,v_n)$ 满足局部 Lipschitz 条件，则可得

$$d(u)\le\widetilde{K}\|u\|_0, \tag{25}$$

其中 $\widetilde{K}$ 是一个正常数。

2　弱间断解的定义及性质

定义 2.1　一个连续且分块 C^1 的向量函数

$$u=u(t,x)=\begin{cases}u_-(t,x), & x\le x_k(t),\\ u_+(t,x), & x\ge x_k(t)\end{cases} \tag{26}$$

称为方程组 (1) 具弱间断线 $x=x_k(t)$ 的弱间断解，如果 $u=u(t,x)$ 在 $x=x_k(t)$ 的两侧分别在经典意义下满足方程组 (1)，且

$$u_-\big(t,x_k(t)\big)=u_+\big(t,x_k(t)\big), \tag{27}$$

而 $u(t,x)$ 的一阶偏导数在 $x=x_k(t)$ 上具有第一类间断点。

由 (2) 可证明 $x=x_k(t)$ 必是方程组 (1) 的一条特征线，设为一条 k-特征线，即成立

$$\frac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_k\big(u_-(t,x_k(t))\big)=\lambda_k\big(u_+(t,x_k(t))\big), \tag{28}$$

则 $x=x_k(t)$ 称为 k-弱间断线，而相应的弱间断解称为 k-弱间断解。

引理 2.1　对 k-弱间断解 (26)，记 $w_i^{\pm}=l_i(u)u_x^{\pm}\,(i=1,\cdots,n)$，则在 k-弱间断线 $x=x_k(t)$ 上成立

$$w_i^-\equiv w_i^+,\quad \forall\, i\ne k, \tag{29}$$

且

$$w_k^- \equiv w_k^+. \tag{30}$$

当且仅当其在 $x = x_k(t)$ 上某一点成立时。当 (30) 成立时，k-弱间断解 (26) 退化为 C^1 解。

证明 由 (27) 知

$$\frac{\partial u_-}{\partial t} + \frac{\partial u_-}{\partial x}\dot{x}_k(t) = \frac{\partial u_+}{\partial t} + \frac{\partial u_+}{\partial x}\dot{x}_k(t), \tag{31}$$

由 (1) 及 (28) 并注意到 (27)，就有

$$\big(\lambda_k(u)I - A(u)\big)\Big[\frac{\partial u}{\partial x}\Big] = 0, \tag{32}$$

其中 $[\frac{\partial u}{\partial x}]$ 为 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在 $x = x_k(t)$ 上的跃度。于是 $[\frac{\partial u}{\partial x}]$ 平行于 $r_k(u)$，从而由 (5) 式就有

$$l_i(u)\Big[\frac{\partial u}{\partial x}\Big] \equiv 0, \quad \forall\, i \neq k, \tag{33}$$

即

$$w_i^- \equiv w_i^+, \quad \forall\, i \neq k, \tag{34}$$

这就证明了 (29)。

下面来证明 (30)。由 (17) 并注意到 (27)，可得

$$\frac{\mathrm{d}w_k^+}{\mathrm{d}_k t} = \sum_{j,h=1}^{n} \gamma_{kjh}(u)w_j^+ w_h^+ + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\gamma}_{kj}(u)w_j^+, \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_k^-}{\mathrm{d}_k t} = \sum_{j,h=1}^{n} \gamma_{kjh}(u)w_j^- w_h^- + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\gamma}_{kj}(u)w_j^-. \tag{36}$$

由此并注意到 (29) 式及 w_i 的有界性，可得如下关于 $[w_k]$ 的齐次线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}[w_k]}{\mathrm{d}_k t} = C[w_k], \tag{37}$$

其中 C 为一个 t 的连续函数。利用其柯西问题解的唯一性即得 (30)。 **证毕**

推论 2.1 对于方程组 (1) 满足弱间断初值

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & -\infty < x \leq 0, \\ \varphi_2(x), & 0 \leq x < +\infty \end{cases} \tag{38}$$

的柯西问题，其中 $\varphi_1 \in C^1(-\infty, 0]$，$\varphi_2 \in C^1[0, +\infty)$，且 $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$，但 $\varphi_1'(0) \neq \varphi_2'(0)$，则其在点 $(t, x) = (0, 0)$ 附近的局部弱间断解 $u = u(t, x)$ 包括过点 $(t, x) = (0, 0)$ 的 n 条弱间断线 $x = x_i(t)(x_i(0) = 0)\,(i = 1, \cdots, n)$，这些弱间断线中有些可能退化，即在其上仍为 C^1 光滑。其中 $x = x_k(t)(x_k(0) = 0)$ 不退化，即确为 k-弱间断线的充要条件为

$$w_k^+(0, 0) \neq w_k^-(0, 0), \tag{39}$$

其中 $w_i^{\pm}(0, 0) = l_i(\varphi_{1,2}(0))\varphi_{1,2}'(0)\,(i = 1, \cdots, n)$。换言之 $x = x_k(t)(x_k(0) = 0)$，退化的充要条件为

$$w_k^+(0, 0) = w_k^-(0, 0). \tag{40}$$

由文献 [16] 中之结论及引理 2.1 即可证明此推论。

推论 2.2　当两条弱间断线相交时不会产生新的弱间断线，即当 i-弱间断线 $x = x_i(t)$ 与 j-弱间断线 $x = x_j(t)$ 相互作用时，只产生 i-弱间断线和 j-弱间断线。

证明　假设 i-弱间断线与 j-弱间断线相交于点 $A(t_0, x_0)$，则对于以 $t = t_0$ 时的解 $u(t_0, x)$ 为初值的柯西问题，由于其在点 (t_0, x_0) 处满足

$$w_i^+(t_0,x_0) \neq w_i^-(t_0,x_0), \quad w_j^+(t_0,x_0) \neq w_j^-(t_0,x_0), \quad w_k^+(t_0,x_0) = w_k^-(t_0,x_0), \quad k \neq i,j,$$

由推论 2.1，可得在点 (t_0, x_0) 附近的局部弱间断解只含有 i-弱间断线和 j-弱间断线。　**证毕**

推论 2.3　对于方程组 (1) 满足 (8)-(10) 的混合初边值问题，当在点 $(t, x) = (0, 0)$ 处只满足 C^0 相容性条件、但不满足 C^1 相容性条件时，其局部弱间断解只包含过原点的对应于正特征的弱间断线，且对 $s = m+1, \cdots, n$，存在过原点的非退化 s-弱间断线的充要条件是

$$w_s(0,0) \neq \sum_{r=1}^{m} D_{sr}\big(0,\varphi(0)\big)w_r(0,0) + \bar{D}_s\big(0,\varphi(0)\big) + \sum_{\bar{s}=m+1}^{n} \bar{\bar{D}}_{s\bar{s}}\big(0,\varphi(0)\big)H'_{\bar{s}}(0), \tag{41}$$

其中

$$w_i(0,0) = l_i\big(\varphi(0)\big)\varphi'(0), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{42}$$

由文献 [16] 中之结论及第 1 节中对 $w_i\,(i = 1, \cdots, n)$ 所列出的边界条件 (22)，由引理 2.1 即可证明此推论。

类似地可证明以下三个推论，它们说明边界 $x = 0$ 上的弱间断点或对应于负特征的弱间断线经边界 $x = 0$ 反射后只产生对应于正特征的弱间断线。

推论 2.4　若一弱间断线 $x = x_k(t)\,(k = 1, \cdots, m)$ 与边界 $x = 0$ 相交，设交点为 $A(t_0, 0)$，则 $t \geq t_0$ 时在 A 点附近的局部弱间断解为只包含过 A 点对应于正特征的弱间断线，且对 $s = m+1, \cdots, n$，存在过 A 点的非退化 s-弱间断线的充要条件是

$$\begin{aligned} w_s(t_0,0) \neq & \sum_{r=1}^{m} D_{sr}\big(t_0,u(t_0,0)\big)w_r(t_0,0) \\ & +\bar{D}_s\big(t_0,u(t_0,0)\big) + \sum_{\bar{s}=m+1}^{n} \bar{\bar{D}}_{s\bar{s}}\big(t_0,u(t_0,0)\big)H'_{\bar{s}}(t_0). \end{aligned} \tag{43}$$

推论 2.5　若 $H_s(t)\,(s = m+1, \cdots, n)$ 在 $t = t_0$ 处存在弱间断，则在点 $A(t_0, 0)$ 附近的局部弱间断解只包含过 A 点对应于正特征的弱间断线，且对 $s = m+1, \cdots, n$，存在过 A 点的非退化 s-弱间断线的充要条件仍为 (43) 式，其中 $H'_{\bar{s}}(t_0)$ 为 $H_{\bar{s}}(t)$ 在 $t = t_0$ 处的右导数。

推论 2.6　若 $H_s(t)\,(s = m+1, \cdots, n)$ 在 $t = t_0$ 处存在弱间断，且有一弱间断线 $x = x_k(t)\,(k = 1, \cdots, m)$ 与边界 $x = 0$ 交于 $A(t_0, 0)$，则在点 $A(t_0, 0)$ 附近的局部弱间断解只包含过 A 点对应于正特征的弱间断线，且对 $s = m+1, \cdots, n$，存在过 A 点的非退化 s-弱间断线的充要条件仍为 (43)，其中 $H'_{\bar{s}}(t_0)$ 为 $H_{\bar{s}}(t)$ 在 $t = t_0$ 处的右导数。

注 2.1　在 $x = L$ 处，利用边界条件 (23) 可得类似的结论。

3　一阶拟线性双曲型方程组的半整体弱间断解

定义 3.1　对于任意一个连续且分块 C^1 的弱间断函数 $y(x)$，定义 $y(x)$ 的弱间断 C^1 模为

$$\|y(\cdot)\|_{C^{(1)}} = \|y(\cdot)\|_{C^0} + \|y'(\cdot)\|_{C^{(0)}}, \tag{44}$$

其中 $\|\cdot\|_{C^0}$ 为函数的 C^0 模，而 $\|\cdot\|_{C^{(0)}}$ 为函数分块 C^0 模的最大值，类似地，对弱间断解 $u=u(t,x)$ 可定义

$$\|u(t,\cdot)\|_{C^{(1)}}=\|u(t,\cdot)\|_{C^0}+\|u_x(t,\cdot)\|_{C^{(0)}}. \tag{45}$$

定理3.1 (半整体弱间断解) 假设 $l_{ij}(u)$, $\lambda_i(u)$, $f_i(u)$ 及 $G_i(t,\cdot)\,(i,j=1,\cdots,n)$ 都是有关变量的 C^1 函数，并且满足条件 (2), (7) 及 (12)。假设 $\varphi(x)$ 在 $[0,L]$ 上有有限个弱间断点，$H_i(t)\,(i=1,\cdots,n)$ 在任何有限区间 $[0,T]$ 上有有限个弱间断点，且在点 $(t,x)=(0,0)$ 和 $(0,L)$ 处分别满足 C^0 相容性条件，但可能不满足 C^1 相容性条件，则对任意给定且可能相当大的 $T_0>0$，如果 $\|\varphi\|_{C^{(1)}[0,L]}$ 和 $\|H\|_{C^{(1)}[0,T_0]}$ 充分小 (依赖于 T_0)，混合初边值问题 (1) 及 (8)-(10) 在区域

$$R(T_0)=\big\{(t,x)\mid 0\le t\le T_0,\,0\le x\le L\big\} \tag{46}$$

上存在唯一的含有有限条弱间断线的半整体弱间断解 $u=u(t,x)$，其弱间断 C^1 模充分小。进一步假设 $\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,\cdot)\,(i=1,\cdots,n)$ 关于变量 $v=(v_1,\cdots,v_n)$ 满足局部 Lipschitz 条件，则成立以下估计式

$$\|u\|_{C^{(1)}[R(T_0)]}\le K\big(\|\varphi\|_{C^{(1)}[0,L]}+\|H\|_{C^{(1)}[0,T_0]}\big), \tag{47}$$

其中 K 是一个依赖于 T_0 的正常数。

由文献 [16] 可知，满足定理3.1条件的混合初边值问题 (1) 及 (8)-(10) 的局部弱间断解 $u=u(t,x)$ 是存在的，因此，要证定理3.1，只需证明下面的引理。

引理3.1 在定理3.1的条件下，对任意给定并可能相当大的 $T_0>0$，如果 $\|\varphi\|_{C^{(1)}[0,L]}$ 以及 $\|H\|_{C^{(1)}[0,T_0]}$ 适当小 (依赖于 T_0)，那么对问题 (1) 及 (8)-(10)，在任意区域

$$R(T)=\big\{(t,x)\,|\,0\le t\le T,\,0\le x\le L\big\},\quad 0<T<T_0, \tag{48}$$

上的含有有限条弱间断线的弱间断解 $u=u(t,x)$，成立下面的一致先验估计

$$\|u(t,\cdot)\|_{C^{(1)}}=\|u(t,\cdot)\|_{C^0}+\|u_x(t,\cdot)\|_{C^{(0)}}\le\tilde{C}(T_0),\quad \forall\,0\le t\le T, \tag{49}$$

其中 $\tilde{C}(T_0)$ 是一个与 T 无关，但可能与 T_0 有关的正常数。

证明 由于过任意给定点 (t,x) 的第 i 特征线必不与 i-弱间断线相交，由引理2.1，只要将有关的 C^0 模 $\|w(t,\cdot)\|_{C^0}$ 改为相应的模 $\|w(t,\cdot)\|_{C^{(0)}}$，文献 [22] 中的证明可以完全重复地进行而得到相应的结论。 **证毕**

注3.1 对于柯西问题 (1) 及 (8)，假设 $\varphi(x)$ 在 $[0,L]$ 上有有限个弱间断点，若 $\|\varphi\|_{C^{(1)}[0,L]}$ 充分小，则在其最大决定区域 D 内存在整体弱间断解 $u=u(t,x)$，并且成立

$$\|u\|_{C^{(1)}[D]}\le\bar{K}\|\varphi\|_{C^{(1)}[0,L]}, \tag{50}$$

其中 $\bar{K}$ 为一正常数，而 $D=\{(t,x)\,|\,t\ge 0,\bar{x}(t)\le x\le\bar{\bar{x}}(t)\}$，其中 $x=\bar{x}(t)$ 为过点 $(t,x)=(0,0)$ 的最右特征线，它满足

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\bar{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_n\big(u(t,\bar{x}(t))\big),\\ \bar{x}(0)=0,\end{cases} \tag{51}$$

而 $x=\bar{\bar{x}}(t)$ 为过点 $(t,x)=(0,L)$ 的最左特征线，它满足

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\bar{\bar{x}}(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_1\big(u(t,\bar{\bar{x}}(t))\big),\\ \bar{\bar{x}}(0)=L.\end{cases} \tag{52}$$

4　一阶拟线性双曲型方程组弱间断解的精确边界能控性及能观性

有了上述关于半整体弱间断解的结论，利用文献 [6-9,12,14] 中在 C^1 解框架下得到一阶拟线性双曲型方程组精确边界能控性及能观性的方法，可类似地得到在弱间断意义下相应的精确边界能控性及能观性。

定理 4.1 (双侧控制)　假设 $\lambda_i(u)$, $l_i(u)$, $f_i(u)$ 和 $G_i(t,\cdot)$ $(i=1,\cdots,n)$ 都是关于各自变量的 C^1 函数，并且满足条件 (2), (7) 及 (12)，如果

$$T > L \max_{\substack{r=1,\cdots,m\\ s=m+1,\cdots,n}} \left(\frac{1}{|\lambda_r(0)|}, \frac{1}{\lambda_s(0)} \right), \tag{53}$$

那么对任给的初值

$$t=0:\ u=\varphi(x), \quad 0\le x\le L$$

和终值

$$t=T:\ u=\Phi(x), \quad 0\le x\le L, \tag{54}$$

假设它们在区间 $[0,L]$ 上存在有限个弱间断点，且在 $[0,L]$ 上均具有充分小的 $C^{(1)}$ 模，则在区间 $[0,T]$ 上存在弱间断的边界控制函数 $H_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$，其 $C^{(1)}$ 模充分小，使得相应的混合初边值问题 (1) 及 (8)-(10) 存在唯一的半整体弱间断解 $u=u(t,x)$，其 $C^{(1)}$ 模充分小，并且精确满足终端条件 (54)。

定理 4.2 (单侧控制)　假设 $\lambda_i(u)$, $l_i(u)$, $f_i(u)$ 和 $G_i(t,\cdot)$ $(i=1,\cdots,n)$ 都是关于各自变量的 C^1 函数，并且满足条件 (2), (7) 及 (12)，如果其正特征值的个数不超过负特征值的个数

$$\bar{m} \triangleq n-m \le m, \quad \text{即} \quad n\le 2m, \tag{55}$$

且边界条件 (9) 在 $u=0$ 的一个邻域中可以改写为如下等价形式

$$x=0:\ v_{\bar{r}} = \bar{G}_{\bar{r}}(t, v_{\bar{m}+1},\cdots,v_m,v_{m+1},\cdots,v_n) + \bar{H}_{\bar{r}}(t), \quad \bar{r}=1,\cdots,\bar{m}, \tag{56}$$

其中

$$\bar{G}_{\bar{r}}(t,0,\cdots,0)\equiv 0, \quad \bar{r}=1,\cdots,\bar{m}. \tag{57}$$

从而 $\bar{H}_{\bar{r}}$ $(\bar{r}=1,\cdots,\bar{m})$ 的 $C^{(1)}$ 模很小等价于 H_s $(s=m+1,\cdots,n)$ 的 $C^{(1)}$ 模很小。如果

$$T > L\Big(\max_{r=1,\cdots,m} \frac{1}{|\lambda_r(0)|} + \max_{s=m+1,\cdots,n} \frac{1}{\lambda_s(0)} \Big), \tag{58}$$

那么对任意给定的具有有限个弱间断点的初值 $\varphi(x)$ $(0\le x\le L)$ 和终值 $\Phi(x)$ $(0\le x\le L)$ 以及任给的具有有限个弱间断点的 $H_s(t)$ $(0\le t\le T)$ $(s=m+1,\cdots,n)$，它们均具有充分小的 $C^{(1)}$ 模，且在 $(t,x)=(0,0)$ 和 $(T,0)$ 处只满足 C^0 相容性条件、但不一定满足 C^1 相容性条件，则存在 $x=L$ 处的弱间断边界控制函数 $H_r(t)$ $(r=1,\cdots,m)$，其 $C^{(1)}$ 模充分小，使得相应的混合初边值问题 (1) 及 (8)-(10) 存在唯一的半整体弱间断解 $u=u(t,x)$，其 $C^{(1)}$ 模充分小，且精确满足终端条件 (54)。

定理 4.3 (具有较少控制项的双侧控制)　假设 $\lambda_i(u)$, $l_i(u)$, $f_i(u)$ 和 $G_i(t,\cdot)$ $(i=1,\cdots,n)$ 都是关于各自变量的 C^1 函数，并且满足条件 (2), (7) 及 (12)，如果正特征值的个数小于负特征值的个数

$$\bar{m} \triangleq n-m < m, \quad \text{即} \quad n< 2m,$$

且不失一般性，假设在 $x=L$ 上的前 $\bar{m}$ 个边界条件

$$x=L:\ v_{\bar{r}}=G_{\bar{r}}(t,v_{m+1},\cdots,v_n)+H_{\bar{r}}(t),\quad \bar{r}=1,\cdots,\bar{m}, \tag{59}$$

在 $u=0$ 的一个邻域中可以改写为如下等价形式

$$x=L:\ v_s=\bar{G}_s(t,v_1,\cdots,v_{\bar{m}})+\bar{H}_s(t),\quad s=m+1,\cdots,n, \tag{60}$$

其中

$$\bar{G}_s(t,0,\cdots,0)\equiv 0,\quad s=m+1,\cdots,n.$$

从而 $\bar{H}_s\,(s=m+1,\cdots,n)$ 的 $C^{(1)}$ 模充分小等价于 $H_{\bar{r}}\,(\bar{r}=1,\cdots,\bar{m})$ 的 $C^{(1)}$ 模充分小，如果 $T>0$ 满足 (58)，那么对任给的存在有限个弱间断点的初值 $\varphi(x)\,(0\le x\le L)$ 和终值 $\Phi(x)\,(0\le x\le L)$ 以及任给的具有有限个弱间断点的 $H_{\bar{r}}(t)\,(\bar{r}=1,\cdots,\bar{m})$，它们均具有充分小的 $C^{(1)}$ 模，且在 $(t,x)=(0,L)$ 和 (T,L) 处只满足 C^0 相容性条件、但不一定满足 C^1 相容性条件，则必存在 $x=0$ 处的弱间断边界控制函数 $H_s(t)\,(s=m+1,\cdots,n)$ 和 $x=L$ 处的弱间断边界控制函数 $H_{\bar{\bar{r}}}(t)\,(\bar{\bar{r}}=\bar{m}+1,\cdots,m)$，其 $C^{(1)}$ 模均充分小，使得相应的混合初边值问题 (1) 及 (8)-(10) 存在唯一的半整体弱间断解 $u=u(t,x)$，其 $C^{(1)}$ 模很小，且精确满足终端条件 (54)。

定理 4.4 (双侧观测)　令 $T>0$ 满足 (53)。假设 $H(t)=(H_1(t),\cdots,H_n(t))$ 在 $[0,T]$ 上的 $C^{(1)}$ 模充分小，对任给的存在有限个弱间断点的初值 $\varphi(x)$，$\|\varphi\|_{C^{(1)}[0,L]}$ 充分小，设混合初边值问题 (1) 及 (8)-(10) 在 $(t,x)=(0,0)$ 和 $(0,L)$ 处只满足 C^0 相容性条件、但不一定满足 C^1 相容性条件，则利用在区间 $[0,T]$ 上在 $x=0$ 处相应于负特征值的观测值 $v_r=\bar{v}_r(t)\,(r=1,\cdots,m)$ 和 $x=L$ 处相应于正特征值的观测值 $v_s=\bar{\bar{v}}_s(t)\,(s=m+1,\cdots,n)$，就可以唯一地决定初值 $\varphi(x)$，并成立下面的能观性不等式

$$\|\varphi\|_{C^{(1)}[0,L]}\le C\Big(\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^{(1)}[0,T]}+\sum_{s=m+1}^{n}\|\bar{\bar{v}}_s\|_{C^{(1)}[0,T]}+\|H\|_{C^{(1)}[0,T]}\Big), \tag{61}$$

其中 C 为一个正常数。

定理 4.5 (单侧观测)　假设正特征值的个数不超过负特征值的个数

$$\bar{m}\triangleq n-m\le m,\quad 即\quad n\le 2m, \tag{62}$$

且在 $u=0$ 的一个邻域中，由边界条件 (10) 可得到

$$x=L:\ v_s=\bar{G}_s(t,v_1,\cdots,v_{\bar{m}},v_{\bar{m}+1},\cdots,v_m)+\bar{H}_s(t),\quad s=m+1,\cdots,n, \tag{63}$$

其中

$$\bar{G}_s(t,0,\cdots,0)\equiv 0,\quad s=m+1,\cdots,n, \tag{64}$$

从而

$$\sum_{s=m+1}^{n}\|\bar{H}_s\|_{C^{(1)}}\le \bar{C}\sum_{r=1}^{m}\|H_r\|_{C^{(1)}},$$

而 $\bar{C}$ 为一个正常数。设 $\|H\|_{C^{(1)}[0,T]}$ 充分小，且 $\frac{\partial G_r}{\partial t}\,(r=1,\cdots,m)$ 关于除 t 之外的变量满足局部 Lipschitz 条件，令 $T>0$ 满足 (58)。对任给满足定理 4.4 中所示条件的初值，则利用在区

间 $[0,T]$ 上在 $x=0$ 处相应于负特征值的观测值 $v_r=\bar{v}_r(t)\,(r=1,\cdots,m)$，就可以惟一地决定初值 $\varphi(x)$，并且成立下面的能观性不等式

$$\|\varphi\|_{C^{(1)}[0,L]} \le C\Big(\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^{(1)}[0,T]}+\|H\|_{C^{(1)}[0,T]}\Big), \tag{65}$$

其中 C 为一个正常数。

定理 4.6 (具有较少观测项的双侧观测) 假设正特征值的个数小于负特征值的个数

$$\bar{m}\triangleq n-m<m, \quad 即 \quad n<2m,$$

且不失一般性，假设边界条件 (9) 在 $u=0$ 的一个邻域中可以改写为如下等价形式

$$x=0: v_{\bar{r}}=\bar{G}_{\bar{r}}(t,v_{\bar{m}+1},\cdots,v_m,v_{m+1},\cdots,v_n)+\bar{H}_{\bar{r}}(t), \quad \bar{r}=1,\cdots,\bar{m},$$

且

$$\bar{G}_{\bar{r}}(t,0,\cdots,0)\equiv 0, \quad \bar{r}=1,\cdots,\bar{m},$$

于是

$$\bar{\bar{C}}\sum_{s=m+1}^{n}\|H_s\|_{C^{(1)}} \le \sum_{\bar{r}=1}^{\bar{m}}\|\bar{H}_{\bar{r}}\|_{C^{(1)}} \le \bar{C}\sum_{s=m+1}^{n}\|H_s\|_{C^{(1)}},$$

其中 $\bar{C},\bar{\bar{C}}$ 为正常数。假设 $\|H\|_{C^{(1)}}$ 充分小，且 $\frac{\partial G_s}{\partial t}\,(s=m+1,\cdots,n)$ 关于除 t 之外的变量满足局部 Lipschitz 条件，令 $T>0$ 满足 (58)。对任给的满足定理 4.4 中要求的初值，则利用在时间 $[0,T]$ 上在 $x=0$ 处相应于负特征值的部分观测值 $v_{\bar{s}}=\bar{v}_{\bar{s}}(t)\,(\bar{s}=\bar{m}+1,\cdots,m)$ 和在 $x=L$ 处相应于正特征值的观测值 $v_s=\bar{\bar{v}}_s(t)\,(s=m+1,\cdots,n)$，就可以唯一地确定初值 $\varphi(x)$，并且成立下面的能观性不等式

$$\|\varphi\|_{C^{(1)}[0,L]} \le C\Big(\sum_{\bar{s}=\bar{m}+1}^{m}\|\bar{v}_{\bar{s}}\|_{C^{(1)}[0,T]}+\sum_{s=m+1}^{n}\|\bar{\bar{v}}_s\|_{C^{(1)}[0,T]}+\|H\|_{C^{(1)}[0,T]}\Big), \tag{66}$$

其中 C 为一个正常数。

致谢：作者感谢李大潜院士宝贵的建议和不倦的教诲。

参考文献：

[1] Lions J L. Contrôlabilité Exacte, Perturbatoins et Stabilisation de Systèmes Distribués, vol. I, Contrôlabilité Exacte RMA8[M]. Masson: Paris, 1988

[2] Lions J L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems[J]. SIAM Review, 1988, 30: 1-68

[3] Zuazua E. Boundary observability for the finite-difference space semi-discretizations of the 2-D wave equation in the square[J]. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 1999, 78: 523-563

[4] Yao P. On the observability inequalities for exact controllability of wave equations with variable coefficients[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1999, 37: 1568-1599

[5] Russel D L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations, recent progress and open questions[J]. SIAM Review, 1978, 20: 639-739

[6] Li T S. Controllability and Observability for Quasilinear Hyperbolic Systems[M]. AIMS Series on Applied Mathematics, Volume 3, American Institute of Mathematical Sciences & Higher Education Press, 2010

[7] Li T S, Rao B P. Local exact boundary controllability for a class of quasilinear hyperbolic systems[J]. Chinese Ann Math, 2002, 23B: 209-218

[8] Li T S, Rao B P. Exact boundary controllability for quasilinear hyperbolic systems[J]. SIAM Journal Control Optim, 2003, 41: 1748-1755

[9] Zhang Q. Exact boundary controllability with less controls acting on two ends for quasilinear hyperbolic systems (in Chinese)[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser A, 2009, 24(1): 65-74

[10] Li T S, Yu L X. Exact boundary controllability for 1-D quasilinear wave equations[J]. SIAM Journal Control Optim, 2006, 45(3): 1074-1083

[11] Li T S. Exact boundary controllability for quasilinear hyperbolic equations (systems)(in Chinese)[J]. Appl Math Journal Chinese Univ, 2005, 20A: 127-146

[12] Li T S. Observabilité exacte frontière pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires[J]. C R Acad Sci Paris Ser I, 2006, 342: 937-942

[13] Li T S. Exact boundary observability for 1-D quasilinear wave equations[J]. Math Meth Appl Sci, 2006, 29: 1543-1553

[14] Li T S. Exact boundary observability for quasilinear hyperbolic systems[J]. ESAIM Control Optim Calc Var, 2008, 14(4): 759-766

[15] Li T S, Wang L B. Global existence of weakly discontinous solutions to the Cauchy problem with a kind of non-smooth initial data for quasilinear hyperbolic systems[J]. Chin Ann Math, 2004, 25B: 319-334

[16] Li T T, Yu W C. Boundary Value Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems[M]. Duke University: Mathematics, Series V, 1985

[17] Wang Z Q. Exact controllability for nonautonomous first order quasilinear hyperbolic systems[J]. Chin Ann Math, 2006, 27B: 643-656

[18] Wang Z Q. Exact boundary controllability for nonautonomous quasilinear wave equations[J]. Math Meth Appl Sci, 2007, 30: 1311-1327

[19] Guo L N, Wang Z Q. Exact boundary observability for nonautonomous first order quasilinear hyperbolic systems[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2008, 31: 1956-1971

[20] Guo L N, Wang Z Q. Exact boundary observability for nonautonomous quasilinear wave equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 364(1): 41-50

[21] Li Tatsien. Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems[M]. New York: Masson & John Wiley, 1994

[22] Li T S, Jin Y. Semi-global C^1 solution to the mixed initial-boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems[J]. Chin Ann Math Ser B, 2001, 22: 325-336

[23] John F. Formation of singularities in one dimensional nonlinear wave progagation[J]. Comm Pure Appl Math, 1974, 27: 377-405

[24] John F. Nonlinear Wave Equations, Formation of Singularities[M]. Pitcher Lectures in Math Sciences, Leigh University, American Math Society, 1990

Controllability and Observability of Weakly Discontinuous Solutions for First Order Quasilinear Hyperbolic Systems

YIN Zong-fang

(School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract: Based on the theory of the local exact boundary controllability and observability of the C^1 solution for first order quasilinear hyperbolic systems, we obtain, by studying properties of weakly discontinuous solutions, the existence and uniqueness of the semi-global weakly discontinuous solution to the mixed initial-boundary value problem for first order quasilinear hyperbolic systems, in which the initial and boundary data have finite weak discontinuities, then we get the local exact boundary controllability and observability correspondingly.

Keywords: first order quasilinear hyperbolic system; weakly discontinuous solution; mixed initial-boundary value problem; exact boundary controllability; exact boundary observability

Received: 04 May 2010. **Accepted:** 04 May 2010.